Ejercicios Resueltos

5-2

Física I

Cuerpo rígido (2da Parte)

Ejercicio 14 al 22

- Cuerpos vinculados - Choques - Teoremas de conservación - Aplicaciones -

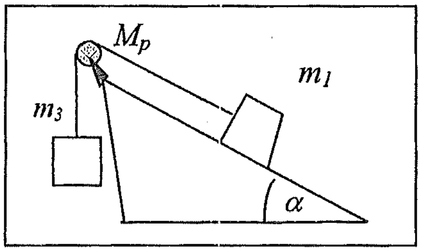
Índice

14. En el sistema de la figura, la polea es parecida a un disco homogéneo y se comporta como un cuerpo rígido.

a) Hallar la aceleración del sistema, y las tensiones T_1 y T_2 en la cuerda.

b) Hallar la variación de energía mecánica cuando desciende una altura igual a 0,6 m

En este ejercicio vamos a ver otro caso de sistemas de cuerpos vinculados.

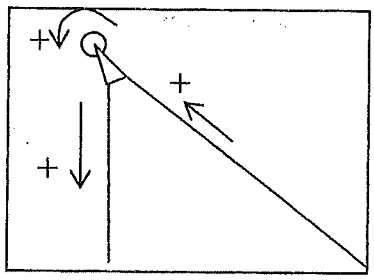


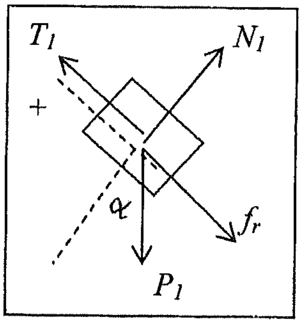
Este es un problema muy importante porque nos enseña como plantear dinámicamente un problema de cuerpos vinculados con una polea de masa apreciable. Hay para eso algunos trucos para descubrir.

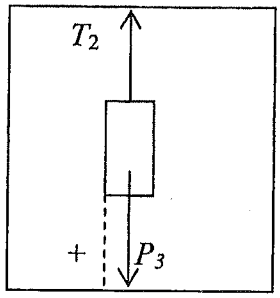
Poleas reales

La gran diferencia con la situación de la polea de masa despreciable es que ***cuando la polea tiene masa, se convierte en un cuerpo más del sistema***. Y para que gire como toda polea es necesario un momento neto (los momentos de las fuerzas no pueden compensarse, de lo contrario no gira), por lo tanto ya ***no vale que la tensión en la cuerda es la misma de los dos lados***. Así que llamaremos T_2 a la tensión que tiene aplicada M_3 y T_1 a la tensión que tiene aplicada M_1.

Vamos a tomar una sistema de referencia "solidario": cuando M_1 sube por el plano (+), la polea gira en sentido horario (+) y el cuerpo M_3 desciende verticalmente (+). Los diagramas de fuerzas para nuestros tres integrantes del sistema son:

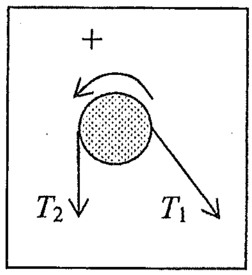






$$M_1 : \begin{cases} x)\, T_1 - f_r - P_{1x} = M_1.a_1 \\ y)\, N_1 - P_{1y} = 0 \end{cases} \qquad\qquad M_3 : \quad P_3 - T_2 = M_3.a_3$$

Y la ecuación de momentos de la polea: tenemos los momentos provocados por las dos tensiones, ambos aplicados a una distancia igual al radio R de la polea. Como se tomó sentido positivo al horario, la tensión T_1 hace un momento negativo y la T_2 hace uno positivo.



$$T_2.R.sen(90) - T_1 R.sen(90) = I_{polea}.\gamma$$

El segundo paso es relacionar las variables de movimiento de los cuerpos y de la polea. Es evidente que en módulo lo que se acelera el M_1 sobre el plano es lo mismo que se acelera el M_3 en su descenso vertical: $a_1 = a_3$ (las llamo "a") Y a su vez, para relacionar esta aceleración lineal con la angular de la polea tenemos la condición de rodadura: $\gamma.R = a$ Para terminar de completar el sistema de ecuaciones nos falta decir que el rozamiento que tiene aplicado el M_1 con el plano inclinado es un caso dinámico: $f_r = \mu.N$, donde la normal sale de la ecuación en el eje y). Entonces:

$$① \; T_1 - \mu.P_{1y} - P_{1x} = M_1.a \qquad ② \; T_2.R - T_1.R = I_{polea}.\frac{a}{R} \qquad ③ \; P_3 - T_2 = M_3.a$$

Este es el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas (a, T_1 y T_2) que debemos resolver

En la ecuación ② podemos pasar dividiendo el radio:

$$T_2 - T_1 = I_{polea} \cdot \frac{a}{R^2} \xrightarrow{uso\ I_P} T_2 - T_1 = \tfrac{1}{2}.M_p.R^2.\frac{a}{R^2} \xrightarrow{simplifico} T_2 - T_1 = \tfrac{1}{2}.M_p.a$$

Y ahora puedo hacer un truco parecido al que se aplicaba en el CBC: sumo miembro a miembro estas ecuaciones, se van las tensiones y nos queda:

$$T_1 - \mu.P_{1y} - P_{1x} = M_1.a$$

$$T_2 - T_1 = \tfrac{1}{2}.M_p.a$$

$$P_3 - T_2 = M_3.a$$

$$\overline{P_3 - \mu.P_{1y} - P_{1x} = \left(M_1 + M_3 + \tfrac{1}{2}.M_p\right)a}$$

Observación: en la ecuación del sistema aparecen de un lado las ***fuerzas externas*** aplicadas en el eje del movimiento y del otro lado ***la suma*** de las inercias a moverse (las masas en el caso de partículas o una magnitud asociada al I de la polea) por la aceleración. Siempre que operemos de esta manera, el aspecto de la ecuación del sistema es el mismo. Si en la ecuación del sistema, del lado derecho aparece una inercia restando, es sinónimo de haber cometido algún error.

Reemplazamos los datos y despejamos la aceleración de los bloques:

$$a = \frac{P_3 - \mu.P_{1y} - P_{1x}}{\left(M_1 + M_3 + \frac{1}{2}.M_p\right)} = \frac{0{,}6.9{,}8 - 0{,}2.0{,}05.9{,}8.\cos(30) - 0{,}05.9{,}8.sen(30)}{0{,}05 + 0{,}6 + 0{,}2} \cong 6{,}53 \tfrac{m}{s^2} \quad ✓$$

Las dos tensiones se encuentran reemplazando en la ecuación ③:

$$P_3 - T_2 = M_3.a \quad \rightarrow \quad 0{,}6.9{,}8 - T_2 = 0{,}6.\ 6{,}53 \quad \xrightarrow{despejo} \quad T_2 = 1{,}96\,\text{N} \quad ✓$$

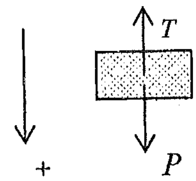
Y en la ① $\quad T_1 - \overbrace{\mu.P_{1y}}^{0{,}085} - \overbrace{P_{1x}}^{0{,}245} = \overbrace{M_1.a}^{0{,}3265} \xrightarrow{despejo} T_1 = 0{,}6565\ \text{N} \quad ✓$

b) En el sistema hay una única fuerza externa sacando energía al realizar trabajo: el rozamiento con la masa M_1. Todas las otras fuerzas son internas (como las tensiones) o son conservativas (como los pesos). Por lo tanto, la variación de energía mecánica de todo el sistema cuando los cuerpos se desplazaron 0,6 m es igual al trabajo que realizó la fuerza de rozamiento sobre M_1

$$W^{FCN} = \Delta E_{mec} \quad \rightarrow \quad W^{FCN} = \overbrace{\mu . P_{1y}}^{Roz} . \Delta x . \cos(180) \cong -0{,}051 \; j \quad \checkmark$$

15. En el dispositivo de la figura la polea cilíndrica homogénea pesa 10 $k\vec{g}$ y su radio es $R = 40$ cm. El peso Q es de 30 $k\vec{g}$. Cuando la velocidad de caída de Q es de 2 m/s se aplica un momento constante de sentido antihorario de 20 $k\vec{g}$ .m.   a) Dibuje en forma cualitativa el vector momento.   b) Calcular la distancia que recorrerá el peso Q hasta detenerse.

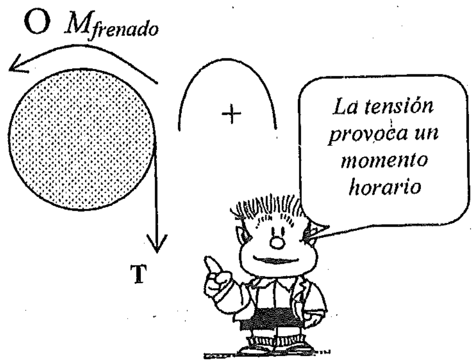
Planteo el diagrama de fuerzas que tiene aplicadas el peso Q, la tensión de la soga y el peso. Así, para esta partícula la 2da ley de Newton nos queda:



$$P - T = M.a \quad \rightarrow \quad T = 30k\vec{g} - 30kg.a \quad (\clubsuit)$$

Ahora analizo la situación para la polea. Gira en sentido horario, y por la regla de la mano derecha eso implica una velocidad angular entrante a la hoja. Como el momento aplicado tiende a frenarla, es opuesto y por lo tanto es saliente a la hoja.

Por la regla de la mano derecha este momento es un vector saliente a la hoja



Además hay fuerzas aplicadas en el eje, que impiden que se traslade (por algo la polea no va a ningún lado), pero no aplican momento (están sobre el eje de rotación, al igual que su propio peso). Como sólo me interesa la ecuación de momentos, planteo el de la tensión en el extremo y el de frenado

Elijo el sentido horario como positivo para que el sistema sea "solidario" (cuando el cuerpo se acelera hacia abajo, la polea gira en forma horaria). Así la ecuación de momentos queda:

$$\sum M = I.\gamma \quad \rightarrow \quad \underbrace{M_{tensión}}_{horario} - \underbrace{M_{frenado}}_{antih.} = \frac{1}{2}.M.R^2.\gamma$$

Reemplazamos el despeje (♣), y la condición de rodadura: $a = \gamma . R$

$$\overbrace{R.T}^{M_{tensión}} - M_{frenado} = \tfrac{1}{2}.M.R^2.\tfrac{a}{R} \xrightarrow{uso\ (♣)} R.(30k\vec{g} - 30kg.a) - 20\,k\vec{g}.m = \tfrac{1}{2}.M.R.a$$

Vamos a despejar de esta ecuación el valor de la aceleración, pero primero ponemos las unidades en el mismo sistema. Pasamos para eso los $k\vec{g}$ a "N" multiplicando por 10:

$$0{,}4\,m.(300\text{N} - 30kg.a) - 200\,\text{N}.m = \tfrac{1}{2}.10\,kg.0{,}4\,m.a \;\rightarrow\; 120 - 12.a - 200 = 2.a$$

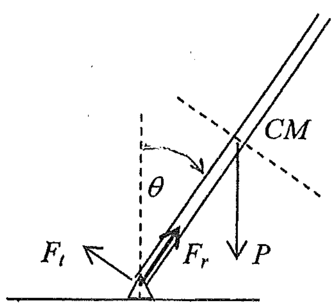
De aquí sacamos: $$a = \frac{120 - 200}{14} = -\,5{,}7\,\frac{m}{s^2}$$

Ahora nos queda averiguar qué distancia descendió el cuerpo antes de detenerse. Para eso planteamos un MRUV para el cuerpo Q, que empieza con $v_o = 2\,\frac{m}{s}$:

$$(v_f)^2 - (v_o)^2 = 2.a.(\Delta x) \;\rightarrow\; 0 - 4 = -11{,}4.\,(\Delta x) \xrightarrow{despejo} \Delta x = \frac{-4}{-11{,}4} = 0{,}35\,m \;\checkmark$$

16. Una barra rígida homogénea de longitud L = 50 cm, masa M = 10 kg e $I_{CM} = ML^2/12$ puede girar libremente en un plano vertical alrededor de un pivote A, fijo al piso. Inicialmente se lleva la varilla a la posición vertical y luego se suelta. Calcule en el instante en que la barra forma un ángulo de 60° con la vertical: a) la aceleración angular, b) la velocidad del centro de masa, c) el impulso angular, d) la fuerza que el pivote A le ejerce a la barra.

Hago un diagrama de Cuerpo Libre de la barra, donde dibujo las fuerzas aplicadas: el Peso en el centro de masa, y la fuerza de vínculo en A. Como el CM de la barra ejecuta un movimiento circular alrededor del pivote, conviene poner a la fuerza de vínculo como dos componentes, una radial y otra tangencial, ya que las ecuaciones del movimiento circular se escriben usando esos ejes (no me voy a complicar dibujando componentes cartesianas, que después me queden fuera de los ejes, ¿OK?). Además, para esos ejes conozco las expresiones de las aceleraciones.



Por los sentidos que le di a esas componentes, no te preocupes: supuse alguno pero es claro que la verdad del asunto me lo dirán los resultados: si dan con signo positivo, nos dicen algo así como: ¡Qué suerte que tenés piba, la pegaste con el sentido que supusiste! Y si da negativo, basta decir el resultado en módulo, y comentar que van al revés del dibujo.

Escribo la 2da ley de Newton para la traslación del CM, usando los habituales ejes del movimiento circular:

$$\begin{cases} \hat{r}: \ -F_r + M.g.\cos(\theta) = M.a_c \\ \hat{t}: \ M.g.sen(\theta) - F_t = M.a_t \end{cases}$$

Usé el eje radial con sentido positivo hacia el centro de giro (el pivote A).

Para la ecuación de momentos, voy a escribirla desde el punto A. ¿Por qué lo hago desde ese punto? Porque desde ahí elimino las componentes de la fuerza de vínculo. Pero cuidado, que entonces debo usar el momento de inercia respecto de A, para lo cual aplico el Teorema de Steiner, trasladando desde el CM una distancia $L/2$:

$$I_A = I_{CM} + M.d^2 = \tfrac{1}{12}.M.L^2 + M.\tfrac{L^2}{4} = \tfrac{1}{3}.M.L^2$$

$$\sum_{desde\ A} \vec{M} = I_A.\gamma \quad \rightarrow \quad \overbrace{M.g.sen(\theta)}^{P_t}.\tfrac{L}{2} = \tfrac{1}{3}.M.L^2.\gamma \quad (\heartsuit)$$

Donde usé la componente tangencial del Peso para calcular el momento (es la que ejerce momento, la componente radial está dirigida en la línea de acción, del CM hacia A).

¡Claro que sí! En ese caso las fuerzas que no hace momento son el peso (la distancia es cero) y la componente F_r porque está en la dirección del centro de momentos. Así, la única fuerza que hace momentos es la componente tangencial.

Nos queda:

$$\sum_{desde\ CM} \vec{M} = I_{CM}.\gamma \quad \rightarrow \quad F_t.\tfrac{L}{2} = \tfrac{1}{12}.M.L^2.\gamma \quad \xrightarrow{simplifico} \quad F_t = \tfrac{1}{6}.M.L.\gamma$$

Esta ecuación o la (♥) permiten resolver el problema, junto con las ecuaciones de traslación. La única diferencia está en la facilidad para despejar, pero el sistema de ecuaciones de 3x3 tiene exactamente la misma solución. Con las ecuaciones bien escritas, terminó la "física" y llega la "matemática". Empiezo a contestar:

a) de la ecuación de momentos (♥)

$$\tfrac{1}{2}.L.\cancel{M}.g.sen(\theta) = \tfrac{1}{3}.\cancel{M}.L^2.\gamma \xrightarrow{L=0,5\ m\ ,\ \theta=60^\circ} \gamma \approx 25,5\ s^{-2}$$

b) esto podemos hacerlo de dos maneras:

① integrando la ecuación de momentos, para eso debo tener expresamente como variable al ángulo θ (no vale reemplazar por su valor final 60°, porque se supone que uno integra para la trayectoria desde el inicio hasta ese punto)

$$\frac{1}{2}.g.sen(\theta) = \frac{1}{3}.L.\,\gamma \xrightarrow{\gamma=\frac{d\omega}{dt}} \frac{1}{2}.g.sen(\theta) = \frac{1}{3}.L.\,\frac{d\omega}{dt}$$

Pero, para integrar, debo hacer aparecer el diferencial de θ. Eso porque de lo contrario, si debo integrar respecto al tiempo, necesito saber como varía el ángulo θ en función del tiempo (cosa que ignoramos). Pero el "truco" es usar la regla de la Cadena, diciendo que la derivada de "ω" respecto al tiempo es igual a la derivada de "ω" respecto a "θ" por la derivada de "θ" respecto al tiempo:

Cambiando el diferencial de una ecuación

$$\boxed{\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}} = \xrightarrow{\omega=\frac{d\theta}{dt}} \frac{d\omega}{d\theta}.\omega \qquad (♗)$$

Alguna vez un alumno me dijo que en el recuadro era fácil ver la igualdad, porque bastaba simplificar el diferencial $d\theta$ del lado derecho. Pero eso es una grosería, no se simplifican los diferenciales. De todas formas, es una buena regla nemotécnica.

Bueno, cambiando en la ecuación de momentos la expresión (♗):

$$\tfrac{1}{2}.g.sen(\theta) = \tfrac{1}{3}.L.\tfrac{d\omega}{d\theta}.\omega \xrightarrow{separo\ variables} \tfrac{3.g}{2.L}.sen(\theta) = \omega\ .\ d\omega$$

Integro de ambos lados, de la situación inicial θ = 0, $\omega = 0$, hasta la final θ = 60°, $\omega =$ ¿?

$$\tfrac{3.g}{2.L}.\int_0^{60} sen(\theta)\ d\theta = \int_0^{\omega_f} \omega\ .d\omega \ \rightarrow\ \tfrac{3.g}{2.L}.\big(\underbrace{-\cos(60)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\cos(0)}_{1}\big) = \tfrac{1}{2}.\omega^2 \ \rightarrow\ \omega = \sqrt{\tfrac{3.g}{2.L}} \approx 5{,}42\ s^{-1}$$

② otra forma es planteando la conservación de la energía mecánica: la barra recibe como única fuerza no conservativa la de vínculo que tiene aplicada en A. Como en ese punto no hay desplazamiento, no hace trabajo. Entonces vale igualar:

$$E_{mec,f} = E_{mec,i} \rightarrow \tfrac{1}{2}.I_A.\omega^2 + M.g.(\overbrace{\tfrac{L}{2}.\cos(60)}^{h_f}) = M.g.\tfrac{L}{2} \quad (♗)$$

Donde elegí el cero de altura en el piso (el CM está inicialmente en la mitad del largo L de la barra, luego baja a la h_f sacada como el cateto adyacente de θ).

Comentario

Para la energía cinética, usé su expresión desde A (donde sólo tenemos el término de rotación) pero vale lo mismo si lo hago desde el CM, cambiando por supuesto la expresión del momento de inercia por $\tfrac{1}{12}.M.L^2$, y la energía cinética por la de rotación más traslación: $E_c = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{12}.M.L^2.\omega^2 + \tfrac{1}{2}.M.(v_{cm})^2$. Pero como el punto A está fijo, se tiene la condición $v_A = v_{cm} - \omega.R \rightarrow v_{cm} = \omega.\tfrac{L}{2}$ (♔)

$$E_c = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{12}.M.L^2.\omega^2 + \tfrac{1}{2}.M.\tfrac{L^2}{4}.\omega^2 = \tfrac{1}{2}.\overbrace{\left(\tfrac{1}{12}.M.L^2 + M.\tfrac{L^2}{4}\right)}^{I_A}.\omega^2$$

Que es igual a la expresión usada arriba.

$$E_{mec,f} = E_{mec,i} \rightarrow \tfrac{1}{2}.I_A.\omega^2 + M.g.(\overbrace{\tfrac{L}{2}.\cos(60)}^{h_f}) = M.g.\tfrac{L}{2}$$

De (♙):
$$\omega^2 = \frac{2.\left(M.g.\frac{L}{2}.(1-\cos(60)\right)}{I_A} = \frac{M.g.L.\left(1-\cos(60)\right)}{\frac{1}{3}.M.L^2} = \frac{3.g}{2.L}$$

Y ya vemos que la expresión obtenida por energía es idéntica a aquella hallada integrando la ecuación de movimiento.

c) el impulso angular desde A lo obtengo como: $L = I_A.\omega = \frac{1}{3}.M.L^2.\omega \approx 4{,}52\ \frac{kg.m^2}{seg}$

d) de las ecuaciones de dinámica para el CM, usando que $a_c = \omega^2.R$ y por la condición (⌂) que dimos en la página anterior, de que el punto A está en reposo se tiene derivando de ambos lados respecto al tiempo $a_t = \gamma R$. Despejo:

$$\begin{cases} \hat{r}: & F_r = M.g.\cos(\theta) - M.\omega^2.\frac{L}{2} = -24{,}5\ \text{N} \\ \hat{t}: & F_t = M.g.sen(\theta) - M.\gamma.\frac{L}{2} = +21{,}2\ \text{N} \end{cases}$$

Controlemos que la otra ecuación de momentos, escrita desde el CM, también se satisface para estas respuestas:

$$F_t = \frac{1}{6}.M.L.\gamma = \frac{1}{6}.10\ kg.0{,}5\ m\ .25{,}5\ s^{-2} \approx 21{,}2\ \text{N}$$

Vemos que da el mismo resultado que obtuve arriba. Eso nos permite sacar la siguiente:

Moraleja: ¿dónde tomo el centro de momentos?

La ecuación de momentos puede escribirse desde el CM o desde cualquier punto en reposo. Si uno **no** se equivoca en los términos llega a un sistema de ecuaciones equivalente. Espero que esto termine con la duda típica de los alumnos: ¿dónde debo tomar el centro de momentos?

17. La figura muestra una barra rígida de masa despreciable que tiene tres masas iguales (M) unidas a ella. La barra tiene libertad de girar alrededor de un eje sin fricción perpendicular a ella que pasa por el punto "Q" y se suelta desde el reposo en la posición horizontal (t = 0 s). Suponiendo que M y D son datos. Calcule:

a) el momento de inercia del sistema (barra + masas) alrededor del pivote,

b) el torque o momento de las fuerzas respecto de "Q" (en t = 0 s),

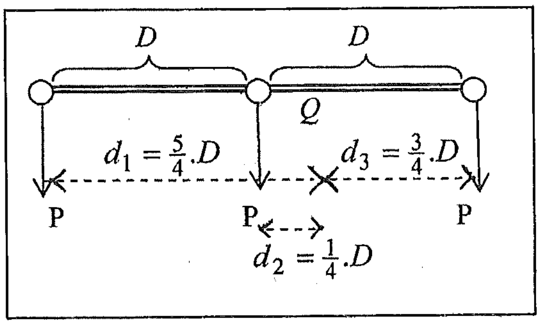
c) la fuerza de vínculo que realiza el pivote en ese instante,

d) la velocidad de la masa 3 cuando la barra está vertical.

a) Para cada masa tenemos que usar la expresión del momento de inercia de una partícula, es decir $I = M.d^2$, donde "d" es la distancia de la partícula al punto fijo o pivote Q. Como el momento de inercia es aditivo, calculo el de cada partícula y los sumo:

$$I_{total} = I_1 + I_2 + I_3 = M.\left(\tfrac{5}{4}.D\right)^2 + M.\left(\tfrac{1}{4}.D\right)^2 + M.\left(\tfrac{3}{4}.D\right)^2 = \tfrac{35}{16}.M.D^2$$

b) En el momento inicial el torque respecto de Q está dado por las tres fuerzas Peso aplicadas sobre las partículas. Así:



$$\sum_Q \vec{M} = M.g.\tfrac{5}{4}.D + M.g.\tfrac{1}{4}.D - M.g.\tfrac{3}{4}.D$$

$$= \tfrac{3}{4}.M.g.D$$

Donde tomé positivo el sentido antihorario. A este mismo resultado llegamos pensando en un único Peso = $3.M.g$ aplicado en el CM (es decir a $\frac{1}{4}.D$ a la izquierda del pivote)

c) Podemos hacerlo de varias maneras. La más sencilla quizás sea escribir la ecuación de momentos desde dos puntos distintos, y comparar. Desde Q:

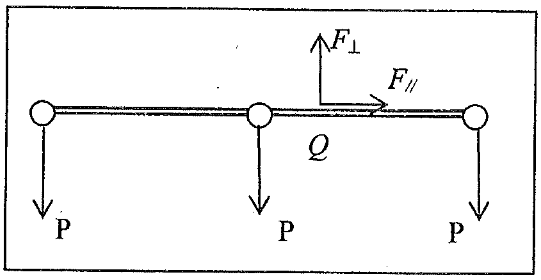
$$\sum_Q \vec{M} = I_Q.\gamma \quad \rightarrow \quad \tfrac{3}{4}.M.g.D = \tfrac{35}{16}.M.D^2.\gamma \quad \xrightarrow{despejo} \quad \gamma = \frac{12.g}{35.D} \qquad (♙)$$

Si lo planteamos desde el CM, sólo tenemos el torque de la fuerza de vínculo aplicada en Q, ya que los pesos en los extremos de la barra hacen torques opuestos, y el de la masa M_2 está en el CM. Por otro lado, para el momento de inercia I_{CM} basta hacerlo como la suma de las dos partículas en los extremos. Así:

$$\sum_{CM} \vec{M} = I_{CM}.\gamma \quad \rightarrow \quad F_\perp . \tfrac{1}{4}.D = 2.M.D^2.\gamma \quad \xrightarrow{uso\ (♙)} \quad F_\perp = \frac{96.M.g}{35}$$

Esta es la única componente de la fuerza de vínculo.

Otra forma de hacerlo es escribir las ecuaciones de la 2da ley de Newton para el *CM*. Ponemos en ese caso dos componentes $F_{\perp}$ y $F_{//}$ (con el sentido elegido como se nos de la gana, después vemos el signo de la respuesta).



Como el *CM* se mueve en movimiento circular, siendo el centro de giro el punto *Q*, las ecuaciones del movimiento serán:

$$\begin{cases} (\hat{r}) \quad F_{//} = 3.M.a_c \\ (\hat{t}) \quad 3.M.g - F_{\perp} = 3.M.a_t \end{cases}$$

En el punto inicial, el *CM* empieza desde el reposo, por lo tanto tiene $v_{cm} = 0$, y esos nos indica que la componente $F_{//}$ es nula. Por otra parte, la componente perpendicular a la barra la obtenemos sabiendo que el punto *Q* siempre está en reposo, por lo tanto:

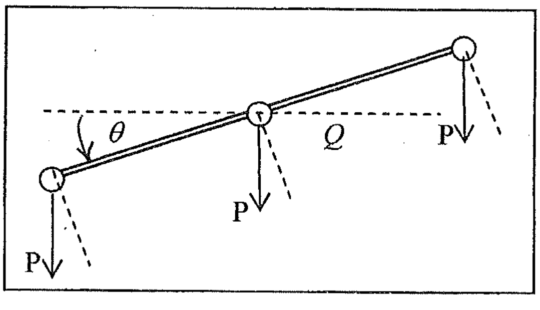
$$v_Q = v_{cm} - \omega.R_Q \;\rightarrow\; v_{cm} = \omega.\tfrac{1}{4}.D \xrightarrow{\text{derivo}} a_t = \gamma.\tfrac{1}{4}.D \xrightarrow{\text{uso (Å)}} = \tfrac{3}{35}.g$$

Y en la ecuación del eje tangencial: $F_{\perp} = 3.M.g - 3.M.a_t = 3.M.g - \frac{9}{35}.M.g = \frac{96}{35}.M.g$

d) este punto también podemos hacerlo por dos caminos: integrando la ecuación de movimiento o usando la conservación de la energía. Exploremos cada camino.

Si uso la ecuación de momentos, debo escribirla para un punto arbitrario del giro. Digamos entonces que la barra lleva girado un ángulo θ.

Tomo como centro de momentos el punto *Q* para eliminar la fuerza de vínculo, la componente del peso que hace torque es la perpendicular a la barra, y se saca multiplicando por el coseno de θ



$$\sum_{Q} \vec{M} = +3.M.g.\cos(\theta).\tfrac{1}{4}.D$$

Usé el peso total aplicado en el CM, pero como en a), vale calcular el momento de cada peso y sumar

En la ecuación de momentos: $\sum M = I_Q.\gamma \rightarrow 3.M.g.\frac{1}{4}.D.\cos(\theta) = \frac{35}{16}.M.D^2.\frac{d\omega}{dt}$

Para integrar esta ecuación debemos usar el truco que vimos en el ejercicio anterior (ver página 8), aplicando la regla de la cadena para cambiar el diferencial:

$$g.\frac{3}{4}.\cos(\theta) = \frac{35}{16}.D.\frac{d\omega}{d\theta}.\omega \xrightarrow{separo} \frac{12.g}{35.D}.\cos(\theta)\ d\theta = \omega.d\omega$$

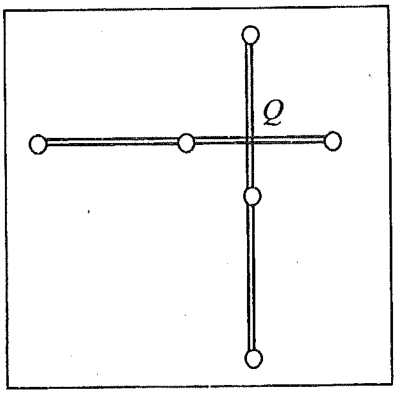
$$\xrightarrow{Integro} \int_0^{\pi/2} \frac{12.g}{35.D}.\cos(\theta)\ d\theta = \int_0^{\omega_f} \omega.d\omega \rightarrow \frac{12.g}{35.D}.\underbrace{(sen\theta)\Big|_0^{\pi/2}}_{=1} = \frac{1}{2}.\omega^2 - 0$$

Donde usé que el punto de interés es para cuando la barra completó un cuarto de vuelta. De aquí despejamos la velocidad angular en ese instante: $\omega = \sqrt{\frac{24.g}{35.D}}$

Y finalmente, la velocidad de M_3 se obtiene como la de rotación alrededor de Q, es decir haciendo:

$$v = \omega.R \rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{24.g}{35.D}}.\frac{3}{4}.D = \sqrt{\frac{24.g.D^2.9}{35.D.16}} = \sqrt{\frac{27.g.D}{70}}$$

Si en cambio planteo energía, escribimos la energía potencial poniendo el cero en el nivel de la barra horizontal. Como el *CM* coincide con la M_2, y el punto Q es el que está fijo, pensando un poco vemos que cuando la barra está vertical el *CM* se encuentra $h = -\frac{1}{4}.D$ (el menos porque está debajo del cero). La energía potencial final vale entonces:



$$E_p = M_t.g.h_f = -3.M.g.\frac{1}{4}.D$$

En esa posición, la energía cinética se puede poner como la asociada a la rotación respecto a Q (como en el ejercicio anterior, también vale ponerla como la traslación del CM más la rotación alrededor del CM): $E_c = \frac{1}{2}.I_Q.\omega^2 = \frac{1}{2}.\frac{35}{16}.M.D^2.\omega^2$

Entonces, como la única fuerza no conservativa aplicada es la de vínculo, y no hace trabajo por estar aplicada en el punto Q donde no hay desplazamiento, vale igualar la energía mecánica inicial (cero, porque no hay potencial ni cinética) con la final:

$$\overbrace{0}^{E_{mec,i}} = \overbrace{-3.M.g.\tfrac{1}{4}.D+\tfrac{1}{2}.\tfrac{35}{16}.M.D^2.\omega^2}^{E_{mec,f}} \xrightarrow{despejo} \omega=\sqrt{\frac{3.M.g.\frac{1}{4}.D}{\frac{1}{2}.\frac{35}{16}.M.D^2}}=\sqrt{\frac{24.g}{35.D}}$$

Esto sigue como en el procedimiento anterior, pero como ya nos dio la misma ω, es evidente que vamos a llegar a la misma v_3.

18. Un cilindro de masa M y radio R se encuentra apoyado encima de una tabla de masa $\boldsymbol{m}$ sobre la que actúa una fuerza F, como indica la figura. El rozamiento entre la tabla y el piso es despreciable y, entre el cilindro y la tabla es tal que el cilindro rueda sin resbalar. Si el sistema parte del reposo:

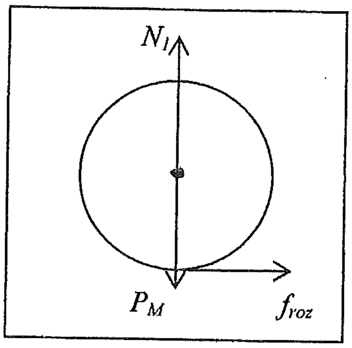
a) Realice los diagramas de cuerpo libre del cilindro y la tabla

b) Calcule la aceleración angular desde un SRNI..

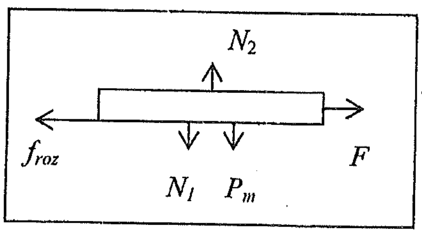
c) Calcule por consideraciones energéticas la velocidad de la tabla cuando ésta se ha desplazado una distancia $\boldsymbol{d}$.

d) Analice el sentido de la aceleración del cm del cilindro, desde un sistema fijo y desde uno solidario a la tabla.

a) Para el cilindro, las fuerzas aplicadas son el peso, la normal de contacto con la tabla, y un rozamiento de tipo estático, que permite que el cilindro ruede sin resbalar. Lo dibujé hacia delante porque entiendo que para que el CM del cilindro pueda avanzar y seguir a la tabla debe tener una fuerza en ese sentido. Pero, si llegamos a equivocarnos, el despeje nos avisa mediante el signo.



Para la tabla, debo dibujar los pares de interacción de N_1 y f_{roz} (iguales y opuestos a los dibujados arriba), además de la normal con el piso, y su peso.



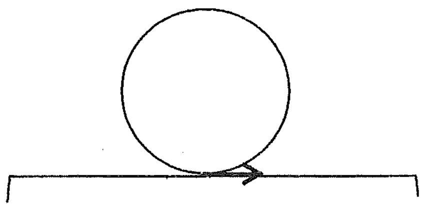
b) escribimos las ecuaciones de la ley de Newton.

$$\text{Cilindro } M: \begin{cases} x)\ f_{roz} = M.a_{cm} \\ y)\ N_1 - P_M = 0 \end{cases} \qquad \text{Tabla } m: \begin{cases} x)\ F - f_{roz} = m.a_2 \\ y)\ N_2 - N_1 - P_M = 0 \end{cases}$$

Mientras que para la ecuación de rotación del cilindro, usando el *CM* como centro de momentos y el sentido antihorario como positivo, tenemos: $R.f_{roz} = \frac{1}{2}.M.R^2.\gamma$

Las ecuaciones de traslación en el eje x, más la de rotación para el cilindro, forman un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas: a_{cm} (aceleración del CM del cilindro), a_2 (aceleración de la tabla), γ (aceleración angular del cilindro), y f_{roz}. Como es habitual, tenemos que encontrar la relación que vincula las aceleraciones de ambos cuerpos.

Así que pensemos con cuidado: en el punto de contacto tenemos la condición de rodadura (el cilindro rueda sobre la tabla sin deslizar). ¿Qué significa en este caso? Para que los puntos de contacto no deslicen uno respecto del otro, deben moverse juntos.



Así que la condición que tenemos que pedir es que la velocidad del punto de contacto del cilindro con la tabla sea igual a la velocidad de la tabla. Como el cilindro tiene una traslación más una rotación, la velocidad en el punto de contacto es la suma vectorial de la velocidad de traslación del CM (dirigida hacia delante, porque el CM avanza), más la de rotación alrededor del CM (también da una velocidad hacia delante, porque gira en sentido antihorario debido al momento de f_{roz}). Así que la condición es:

$$v_P = v_2 \rightarrow v_{cm} + \omega.R = v_2 \xrightarrow{derivo} a_{cm} + \gamma.R = a_2$$

Entonces, reemplazando esta condición en la ecuación de la tabla, nos queda el siguiente sistema de 3ec y 3inc:

$$\begin{cases} M)\ f_{roz} = \frac{1}{2}.M.R.\gamma \\ x_M)\ \ f_{roz} = M.a_{cm} \\ x_m)\ F - f_{roz} = m.(a_{cm} + \gamma.R) \end{cases}$$

De la primera despejo (i) $\frac{2.f_{roz}}{M} = R.\gamma$

Mientras que de la segunda (ii) $\frac{f_{roz}}{M} = a_{cm}$

Reemplazo estos despejes en la 3ra:

$$F - f_{roz} = m.\left(\frac{f_{roz}}{M} + \frac{2.f_{roz}}{M}\right) = m.\frac{3.f_{roz}}{M} \rightarrow F = f_{roz} + \frac{3.m}{M}.f_{roz} \xrightarrow{despejo} f_{roz} = \frac{F}{1+\frac{3.m}{M}}$$

Reemplazando en (i):

$$\frac{2.\frac{F}{(1+\frac{3.m}{M})}}{M} = R.\gamma \rightarrow \gamma = \frac{2.F}{R.M.(1+\frac{3.m}{M})} = \boxed{\frac{2.F}{R.(M+3.m)}}$$

Y en (ii)

$$\frac{\frac{F}{(1+\frac{3.m}{M})}}{M} = a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{F}{M+3.m}$$

c) Para hacer un planteo puramente energético, tenemos dos posibilidades: ① podemos plantear energía sólo para la tabla "m" o ② podemos plantear energía para el conjunto. Nosotros vamos a hacerlo de la primera forma, entonces debo tomar en cuenta el trabajo de dos fuerzas no conservativas para la tabla, la F que entrega energía al sistema mediante un trabajo positivo, y la f_{roz} que le saca energía a la tabla y se la transfiere al cilindro.

El teorema nos dice que:

$$W_{f.n.c.} = \Delta E_{mec} \rightarrow F.\text{d}.\cos(0) + f_{roz}.\text{d}.\cos(180) = \tfrac{1}{2}.m.v^2$$

El segundo trabajo queda negativo por el signo del coseno, y es lo que interpretamos como que le saca a "m" para entregarle al cilindro "M". Reemplazando la expresión para la f_{roz} hallada en b):

$$F.\text{d} - \frac{F}{1+\frac{3.m}{M}}.\text{d} = \tfrac{1}{2}.m.v^2 \xrightarrow{común\ divisor} \frac{F.\text{d}.(M+3.m) - M.F.\text{d}}{M+3.m} = \tfrac{1}{2}.m.v^2$$

Operando:

$$\frac{M.F.\text{d} + 3.m.F.\text{d} - M.F.\text{d}}{M+3.m} = \tfrac{1}{2}.m.v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{6.F.\text{d}}{M+3.m}}$$

Observación: en el despeje de la fuerza de rozamiento vimos que:

$$a_2 = a_{cm} + \gamma.R \xrightarrow{de\,(i)e(ii)} = \frac{3.f_{roz}}{M} \xrightarrow{resultado\ b} = \frac{3.\frac{F}{1+\frac{3.m}{M}}}{M} \xrightarrow{operando} \frac{3.F}{M+3.m}$$

Esta aceleración es constante, porque no depende de nada que dependa del tiempo. Entonces, la tabla ejecuta un vulgar MRUV, para el cual puedo usar la ecuación complementaria y sacar la velocidad final cuando avanza "**d**". Comprobá el resultado de arriba.

d) Como todas las ecuaciones las escribimos desde un sistema de referencia inercial (no se pusieron las fuerzas de inercia, sólo las "verdaderas", ¿OK?) entonces de la ecuación:

$$x_M)\quad f_{roz} = M.a_{cm} \xrightarrow{reemplazo\ \ f_{roz}} a_{cm} = \frac{\frac{F}{1+\frac{3.m}{M}}}{M} = \frac{F}{M+3.m}$$

El sentido es positivo, por lo tanto desde el SRI tenemos que el CM del cilindro se acelera hacia la derecha (el sentido elegido como positivo).

Si ahora en cambio quiero plantearlo desde el SRNI fijo a la tabla, debo agregar a la ecuación del cilindro una fuerza No inercial (a mi me gusta llamar ficticia), de sentido opuesto a como se acelera la tabla (o sea hacia la izquierda), de valor igual al producto de la masa del cilindro "M" por la aceleración del sistema de referencia (la tabla), que en el problema llamamos "a_2"

$$x_M)\quad f_{roz} - \overbrace{M.a_2}^{f_{NI}} = M.a^*_{cm}$$

Donde a^*_{cm} es la aceleración del CM del cilindro vista desde el Sistema de Referencia No inercial donde estamos escribiendo la ecuación.

En la parte superior mostré el valor de a_2, así que reemplazo y despejo:

$$x_M)\quad \overbrace{\frac{F}{1+\frac{3.m}{M}}}^{f_{roz}} - M.\overbrace{\frac{3.F}{M+3.m}}^{a_2} = M.a^*_{cm} \rightarrow a^*_{cm} = \frac{1}{M}.\left(\frac{F}{\frac{M+3.m}{M}} - M.\frac{3.F}{M+3.m}\right)$$

Operando:

$$a^*_{cm} = \frac{F}{M+3.m} - 3.\frac{F}{M+3.m} = -2.\frac{F}{M+3.m}$$

El signo negativo nos indica que visto desde la Tabla el CM del cilindro acelera hacia atrás.

Otra forma de llegar a esta aceleración es usando las "viejas conocidas" transformaciones de Galileo, poniendo que la aceleración del CM del cilindro respecto a la tabla se relaciona con:

$$a_{cil,tabla} = a_{cil,Tierra} + a_{tierra,tabla}$$

La última aceleración es la opuesta a la que tiene los subíndices cambiados:

$$a_{cil,tabla} = a_{cil,Tierra} - a_{tabla,tierra}$$

Para usar la misma notación que en el problema, cambio: $\overbrace{a_{cil,tabla}}^{a^*_{cm}} = \overbrace{a_{cil,Tierra}}^{a_{cm}} - \overbrace{a_{tabla,tierra}}^{a_2}$

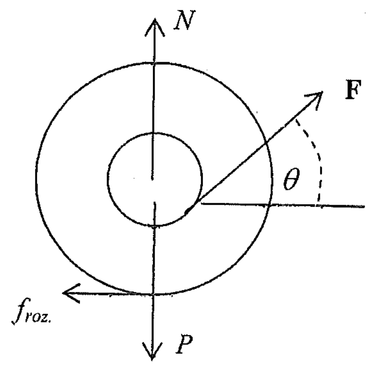
Las dos aceleraciones que aparecen del lado derecho ya las calculamos en el punto b), así que reemplazo y opero:

$$a^*_{cm} = \frac{F}{M+3.m} - \frac{3.F}{M+3.m} = -2.\frac{F}{M+3.m}$$

Como vemos, da el mismo resultado. Podés elegir el camino que más te guste

19. Un yo-yo se encuentra en reposo en una mesa horizontal y está en libertad de rodar, ver figura. Se ejerce sobre el yo-yo una suave tracción hacia arriba de modo que el yo-yo ruede sin resbalar (a) ¿Hacia dónde rodará? (b) En el problema 9, se vio que si se tira horizontalmente, rueda hacia delante ¿Qué ocurre si se tira con un ángulo tal que $\cos\theta = \frac{r}{R}$? (c) ¿Qué sucede si el ángulo es mayor que θ? ¿y si es menor?

Empecemos por hacer el DCL, poniendo la fuerza **F** (vendría a ser como la tensión del hilo, pero no quiero cambiarle el nombre así que la uso como en el enunciado), el rozamiento en el punto de contacto, la Normal y el peso.



Para plantear las ecuaciones los siguientes ejes: positivo para el avance hacia delante y para la rotación horaria. Las ecuaciones nos quedan:

$$\begin{cases} x) \; F.\cos(\theta) - f_{roz} = M.a_{cm} \\ y) \quad N + F.sen(\theta) - P = 0 \end{cases}$$

Y la ecuación de momentos, tomando el 0 en el Centro de Masa, entonces, las fuerzas que aplican momento son la **F** y el rozamiento. Para ambas, observar que el brazo de palanca (o sea la distancia de la recta de acción al centro de momentos) es r y R respectivamente, ya que ambas fuerzas son tangentes a cada circunferencia. Además, mientras que respecto de O el rozamiento provoca un giro en sentido horario (+), la fuerza **F** provoca un giro antihorario (-). La ecuación nos queda:

$$\sum M = I_{cm}.\gamma \quad \rightarrow \quad f_r.R.sen(90) - F.r.sen(90) = \tfrac{1}{2}.M.R^2.\gamma$$

Por último, tenemos la condición de rodadura: $a_{cm} = \gamma.R$. Reemplazo esta condición en la ecuación de momentos:

$$f_r.R - F.r = \tfrac{1}{2}.M.R^{\cancel{2}}.\frac{a_{cm}}{\cancel{R}} \quad \xrightarrow{despejo} \quad f_r = \frac{\tfrac{1}{2}.M.R.a_{cm} + F.r}{R}$$

Reemplazamos este despeje en la ecuación de traslación del eje x:

$$F.\cos(\theta) - \frac{\tfrac{1}{2}.M.R.a_{cm} + F.r}{R} = M.a_{cm} \quad \xrightarrow{opero} \quad F.\cos(\theta) - \tfrac{1}{2}.M.a_{cm} - \tfrac{r}{R}.F = M.a_{cm}$$

Podemos despejar el valor de la aceleración del centro de masa:

$$F.\left(\cos(\theta) - \tfrac{r}{R}\right) = \tfrac{3}{2}.M.a_{cm} \quad \rightarrow \quad a_{cm} = \frac{F.\left(\cos(\theta) - \tfrac{r}{R}\right)}{\tfrac{3}{2}.M}$$

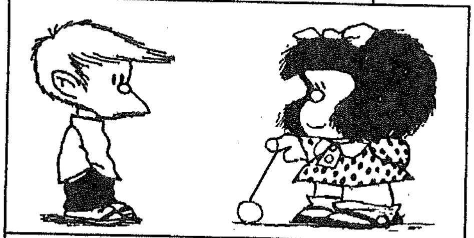
De aquí observamos que el signo de la aceleración del CM del Yo-yo depende del paréntesis que tenemos en el numerador. Así, podemos distinguir tres casos:

① $\cos\theta = \frac{r}{R}$, entonces se anula el numerador, y $a_{cm} = 0$

② $\cos\theta > \frac{r}{R}$, entonces el numerador es positivo, y también resulta positiva en consecuencia la a_{cm}. El cilindro en ese caso sale trasladándose hacia delante.

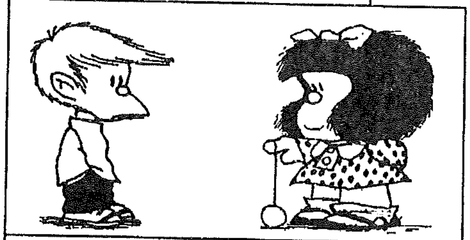
③ $\cos\theta < \frac{r}{R}$, entonces el numerador es negativo, y también resulta negativa la a_{cm}. El cilindro en ese caso sale trasladándose hacia atrás. En particular, para el caso $\theta = 90$ (la fuerza **F** vertical) el yo-yo sale trasladándose hacia la izquierda.

Caso ②



El Yo-yo gira en el lugar, sin que el CM se acelere

Caso ③



El Yo-yo gira y a la vez se traslada hacia la izquierda

20. Un cilindro homogéneo de radio R_1 se mueve por el interior de una tubería de sección circular de radio R. La mitad izquierda de la tubería es lo suficientemente áspera para asegurar que el cilindro ruede sin deslizar, mientras que la otra mitad tiene coeficiente de rozamiento nulo. El cilindro parte del reposo en la mitad rugosa de la tubería, desde un punto en el cual su centro de masa se halla a una altura "h" sobre el punto más bajo de la tubería.

a) ¿Cuál es la velocidad angular del cilindro en la posición más baja?

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cilindro en la mitad lisa de la tubería?

c) Compare las alturas inicial y final. Justifique.

d) ¿Por qué necesita que actúe fuerza de rozamiento para rodar sin resbalar?, ¿qué sucede cuando no hay rozamiento?

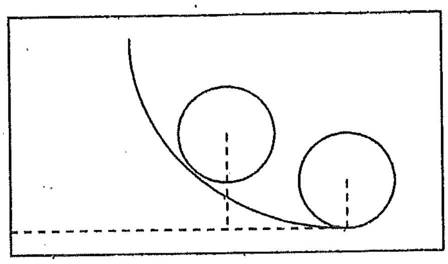
e) Realice los diagramas de velocidades en ambas zonas, con y sin rozamiento.

DATOS: $R_1 = R/4$; $h = R/2$

a) Mientras el cilindro baja por la mitad izquierda, el rozamiento que actúa garantiza en todo momento la condición de rodadura $v_{CM} = \omega R$. De esa manera el punto de contacto es el CIR, su velocidad es nula. Por lo tanto el rozamiento es del tipo estático, está aplicado en un punto que no se desplaza, y como vimos en el cuadernillo 5-1, no realiza trabajo. De esta forma queda asegurada la conservación de la energía mecánica, y el cilindro al bajar pierde energía potencial, transformándola en cinética (de traslación y de rotación). Planteo la conservación de la energía mecánica en ese descenso:

$$E_{mec,i} = E_{mec,f} \rightarrow \underbrace{M.g.h_{CM}}_{inicial} = \tfrac{1}{2}.M.(v_{CM})^2 + \tfrac{1}{2}.I_{CM}.\omega^2 + \overbrace{M.g.h_{CM}}^{final}$$

Donde la altura inicial del CM es $\frac{1}{2}.R$ (cuidado con las erres: R mayúscula es el radio interior de la tubería), mientras que la altura del CM en el punto más bajo coincide con el radio del cilindro ($R_1 = \frac{1}{4}.R$), todo esto midiendo desde el piso (en línea de puntos)



En la ecuación de arriba, uso la condición de rodadura:

$$M.g.\tfrac{1}{2}.R = \tfrac{1}{2}.M.\omega^2.R_1{}^2 + \tfrac{1}{2}.\left(\tfrac{1}{2}.M.R_1{}^2\right)\omega^2 + M.g.\tfrac{1}{4}.R$$

$$M.g.\tfrac{1}{2}.R - M.g.\tfrac{1}{4}.R = \tfrac{3}{4}.M.\omega^2.R_1{}^2 \xrightarrow{R_1=\frac{1}{4}.R} \cancel{M}.g.\tfrac{1}{4}.\cancel{R} = \tfrac{3}{4}.\cancel{M}.\omega^2.\tfrac{1}{16}R^{\cancel{2}}$$

De aquí se despeja: $\omega = \sqrt{\frac{16.g}{3.R}} \xrightarrow{R=4.R_1} \sqrt{\frac{4.g}{3.R_1}}$, cualquiera de las dos está bien.

b) Del otro lado de la tubería, al desaparecer el rozamiento, sigue valiendo la conservación de la energía mecánica. Sin embargo, no llega a la misma altura de la que partió, se queda más abajo.

Así es. Como no hay rozamiento, ya no hay torques aplicados al CM. En consecuencia, el cilindro no cambia su velocidad angular en el ascenso. Sin embargo, si cambia la velocidad del CM, de forma tal que en el ascenso por el sector derecho el cilindro no satisface más la condición de rodadura.

Esto es muy importante que lo entiendas, es la "física del problema". Así que vamos de nuevo: como en la parte lisa no hay momentos respecto al CM, de la ecuación de momentos sale que tampoco hay aceleración angular γ, por lo tanto no cambia la velocidad angular ω. Resulta entonces que mientras sube, el cilindro pierde la energía cinética de traslación del CM, pero como no cambia "ω" se guarda toda la energía cinética de rotación. Por eso, en el sector liso de la derecha, al llegar al punto más alto el cilindro **no** pudo convertir toda la energía cinética en potencial. Sólo convirtió en potencial la energía cinética de traslación. Así, tengo que igualar:

$$E_{mec,i} = E_{mec,f} \rightarrow \tfrac{1}{2}.M.(v_{CM})^2 + \tfrac{1}{2}.I_{CM}.\omega^2 + \underbrace{M.g.h_{CM}}_{inicial} = M.g.\overbrace{h_{CM}}^{?} + \tfrac{1}{2}.I_{CM}.\omega^2$$

La energía cinética de rotación es igual en el punto más bajo que en el más alto. Entonces todo ese término lo cancelamos. Reemplazamos la v_{CM} en el punto más bajo (bueno, yo voy a usar la condición de rodadura con la velocidad angular del punto más bajo que sacamos en a), y la altura del CM para el punto más bajo, se despeja:

$$\tfrac{1}{2}.\cancel{M}.(\omega.R_1)^2 + \cancel{M}.g.\tfrac{1}{4}.R = \cancel{M}.g.\overbrace{h_{CM}}^{?} \xrightarrow{R_1=\frac{1}{4}.R,\ \omega=\sqrt{\frac{16.g}{3.R}}} \underbrace{\tfrac{1}{2}.\tfrac{16.\cancel{g}}{3.\cancel{R}}.\tfrac{1}{16}R^{\cancel{2}} + \tfrac{1}{4}.\cancel{g}.R}_{\frac{5}{12}.R} = \cancel{g}.h_f$$

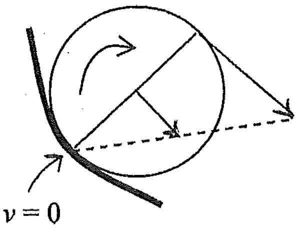
c) Observemos que esta altura final $\frac{5}{12}.R$ es menor que la inicial $\frac{1}{2}.R$. Esto es exactamente como lo razonamos, la ausencia de rozamiento impide que toda la energía cinética se transforme en potencial, y en el ascenso del lado derecho llega a un punto de menor altura que la inicial.

d) esto lo contestamos a medida que hicimos el planteo, pero lo resumimos así: el rozamiento es la fuerza externa que permite que haya un torque de manera de cambiar la velocidad angular, ajustando su valor a la condición de rodadura. Sin ella el cuerpo patina, porque en el punto de contacto la velocidad del cilindro no es nula.

El diagrama de velocidades pedido es el siguiente: en la parte con rozamiento (sector izquierdo) sumo el campo debido a la rotación, más el de la traslación, con el cuidado que en el punto de contacto la suma es nula. En el sector sin rozamiento, dibujo el campo en el punto más alto de la trayectoria, donde sólo existe el campo de velocidades debido a la rotación.

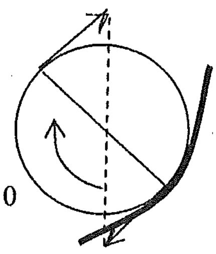
Parte izquierda de la tubería
(con rozamiento)

El CM se traslada y además el cilindro rota, cumpliendo la condición de rodadura. Entonces, el punto de contacto es el CIR, su velocidad es nula



Parte derecha de la tubería
(sin rozamiento)

El punto de contacto tiene velocidad en todo momento, y no se cumple la condición de rodadura. En el punto más alto, $v_{CM} = 0$ y este es el diagrama



21. Sobre un péndulo ideal y sobre una barra fina maciza impactan dos proyectiles idénticos (igual masa y velocidad). Ambos péndulos tienen el mismo valor de masa. Los proyectiles impactan en la partícula y en el centro de la barra respectivamente y quedan incrustados.

a) Analizar ambos sistemas un instante inmediatamente antes y un instante inmediatamente después de la colisión. ¿Se conserva la cantidad de movimiento?

b) ¿Se conserva la energía mecánica durante y después de la colisión?

c) Si la longitud del hilo del péndulo es igual a la mitad de la longitud de la barra. Después del choque, ¿llegará más alto la partícula del péndulo ideal o el centro de masa de la barra? (DATO: $I_{cm} = M.L^2/ 12$)

Primero planteamos el problema del péndulo ideal, al cual lo tratamos como un cuerpo puntual. Al producirse el impacto se conserva la cantidad de movimiento del sistema "bloque+bala". Por lo tanto:

$$m.v_o = (M+m).v_f \quad \rightarrow \quad v_f = \frac{m.v_o}{(m+M)}$$

Luego del impacto, el sistema se comporta como un péndulo ideal, la única fuerza no conservativa (la Tensión) es perpendicular al movimiento, por lo tanto la energía del péndulo es constante:

$$E_{mec,i} = E_{mec,f} \quad \rightarrow \quad \overbrace{m_{sist}.g.h_i}^{=0} + \tfrac{1}{2}.\cancel{m}_{sist}.(v_i)^2 = \cancel{m}_{sist}.g.h_f + \overbrace{\tfrac{1}{2}.m_{sist}.(v_f)^2}^{=0}$$

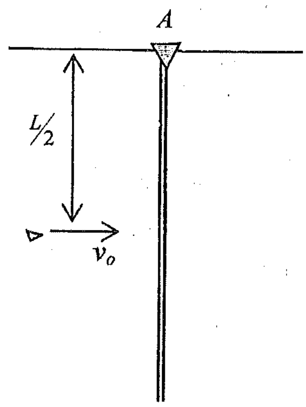
De aquí despejo: $$h_f = \frac{v_i^2}{2.g} = \frac{1}{2}.\frac{m^2.v_o^2}{(M+m)^2.g}$$

Choque contra un CR con un punto fijo

Ahora planteamos la situación para la varilla: en este caso no se conserva ni la energía (choque implica deformaciones y pérdidas de energía), ni la cantidad de movimiento lineal (ya que el sistema **no** está aislado, porque recibe la fuerza del extremo fijo que sirve como pivote). En efecto, en el mismo momento del choque, aparece una fuerza sobre la "varilla" en el extremo de contacto con el techo. Como esta fuerza es externa al sistema, no puedo plantear la conservación de "p". Sin embargo si se conserva su momento angular L_{sist} respecto del punto fijo que sirve de pivote, ya que la fuerza externa que tiene aplicada el sistema "varilla-bala" no hace momento respecto a ese punto (está aplicada ahí, y su distancia es entonces 0).

Esta es la magnitud que se conserva en este tipo de problemas, donde hay una colisión con un cuerpo rígido que tiene un punto fijo o pivote.

Un instante antes del choque tenemos que la barra está quieta y no tiene momento angular, mientras que para la bala lo calculamos como $L = \vec{r} \times \vec{p}$:



$$L_i = L_{Bala} + L_{barra} = \tfrac{L}{2}.m.v_o$$

Un instante después, la varilla adquiere velocidad ya que empieza a girar respecto a O. La bala también participa de este giro al quedar incrustada. Por lo tanto ambos tienen un $\vec{L}$.

Lo calculamos con la expresión $L = I.\ \omega$, tomado respecto de A. Observar que para la varilla necesito el momento de inercia I respecto **del extremo**, es decir que debo usar el Teorema de Steiner para relacionarlo con el que tenemos en el enunciado:

$$I_A = I_{cm} + M.d^2 = \tfrac{1}{12}.M.L^2 + M.\left(\tfrac{L}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{12}.M.L^2 + \tfrac{1}{4}M.L^2 = \tfrac{1}{3}.M.L^2$$

Además, como la bala pega justo en la mitad de la varilla, su velocidad luego del choque coincide con la del CM de la varilla. De todas maneras, vamos a usar la expresión de L con la velocidad angular "ω", que es común a ambos cuerpos (ω es la velocidad de rotación con que giran alrededor del pivote del techo)

$$L_F = m.(\tfrac{L}{2})^2.\omega + \tfrac{1}{3}.M.L^2.\omega$$

Igualamos:

$$m.\frac{L}{2}.v_o = \left(m.\frac{L^2}{4} + \frac{1}{3}.M.L^2\right).\omega \xrightarrow{despejo} \omega = \frac{\frac{1}{2}.m.v_o}{\left(\frac{1}{4}.m + \frac{1}{3}.M\right)L}$$

Con esta velocidad de rotación alrededor del punto A, podemos calcular la altura que alcanza la varilla con la bala luego de la colisión. Como luego del choque la fuerza que ejerce el pivote está aplicada en un punto que está siempre en reposo, su trabajo es nulo (como el rozamiento cuando se cumple la condición de rodadura). Por lo tanto, luego del choque hay conservación de la energía mecánica:

$$E_{mec,i} = E_{mec,f} \rightarrow \overbrace{E_{pot,i}}^{=0} + \frac{1}{2}.I_{total}.(\omega_i)^2 = m_{sist}.g.h_f + \overbrace{E_{cin,f}}^{=0}$$

Donde I_{total} es el momento de inercia del sistema respecto al punto A, y se calcula como la suma del de la varilla más el de la bala (que es una partícula)

$$I_{total} = m.(\tfrac{L}{2})^2 + \tfrac{1}{3}.M.L^2 = (\tfrac{1}{4}.m + \tfrac{1}{3}.M).L^2$$

Reemplazando en la conservación de la energía despejo:

$$\frac{1}{2}.(\frac{1}{4}.m + \frac{1}{3}.M).L^2.\left(\frac{\frac{1}{2}.m.v_o}{(\frac{1}{4}.m + \frac{1}{3}.M).L}\right)^2 = (M+m).g.h_f \xrightarrow{opero}$$

$$\frac{1}{2}.\cancel{(\frac{1}{4}.m + \frac{1}{3}.M)}.L^2.\frac{\frac{1}{4}.m^2.v_o^2}{(\frac{1}{4}.m + \frac{1}{3}.M)^{\cancel{2}}.L^2} = (M+m).g.h_f \xrightarrow{despejo}$$

$$h_f = \frac{m^2.v_o{}^2}{8.g.(\frac{1}{4}.m+\frac{1}{3}.M).(m+M)}$$

Para comparar con la altura que alcanza la partícula (el bloque puntual) hacemos el cociente de las dos expresiones de altura máxima obtenida respectivamente:

$$\frac{h_{f\ (rígido)}}{h_{f\ (puntual)}} = \frac{\dfrac{m^2.v_o{}^2}{8.g.(\frac{1}{4}.m+\frac{1}{3}.M).(m+M)}}{\dfrac{m^2.v_o{}^2}{2.g.(m+M)^2}} = \frac{(m+M)}{4.(\frac{1}{4}.m+\frac{1}{3}.M)} = \frac{\overbrace{(m+M)}^{\text{Numerador menor que divisor}}}{(m+\frac{4}{3}.M)} < 1$$

Pasando de lado vemos que el cuerpo puntual alcanza una altura mayor que la varilla.

Para que quede claro que debo responder a las dos primeras preguntas (está implícito en la forma del planteo) para el cuerpo puntual **si** se conserva el p_{sist} durante el choque, pero para el rígido **no** por la aparición de la fuerza externa en el pivote. En cuanto a la energía, para ninguno de los dos hay conservación durante el choque (son plásticos) pero si hay conservación de la energía para el ascenso del sistema luego del choque.

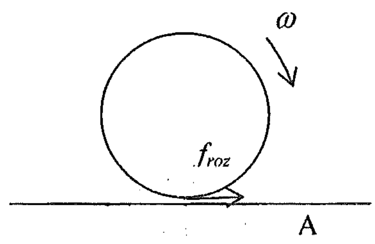
Entonces, como resumen de lo que vimos en este problema, digamos que cuando en el problema hay un choque con un cuerpo rígido que tiene un punto fijo sobre el cual pivotea, tenemos que plantear la conservación del momento angular del sistema respecto de ese punto.
¿Qué ocurre si el cuerpo rígido choca contra una partícula (como la bala) pero no tiene un punto fijo? En ese caso hay conservación de la cantidad de movimiento, y también del momento angular respecto del CM del sistema.

22. Un cilindro homogéneo de radio R y masa M, tiene en $t = 0$ [s] una velocidad angular ω_0 y el módulo de la velocidad de su centro de masa es 0 [m/s]. Se lo deja en libertad sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción entre el cilindro y la superficie es μ.
a) Analice la conservación del momento cinético (**L**) desde un punto fijo al piso. Obtenga las expresiones del momento cinético para el instante inicial y para el instante en que el centro de masa alcanza una velocidad constante.

b) Realice el diagrama de cuerpo libre del cilindro. Analice, para todo el recorrido, si el módulo del vector aceleración para el punto de contacto con la superficie puede ser 0 [m/s^2].
c) Justifique si se conserva la cantidad de movimiento lineal en su recorrido hasta alcanzar la velocidad máxima.

a) El cilindro recibe tres fuerzas: la normal de contacto y el peso en la dirección vertical, y una fuerza de rozamiento en la dirección de movimiento.

El sentido de esta fuerza se razona así: si no hubiera rozamiento, el cilindro giraría en el mismo lugar, patinando sobre la superficie. El rozamiento entonces funciona como un engranaje, que al tomar contacto con el cilindro girando en forma horaria, tiende a frenar el giro con una fuerza aplicada en el punto de contacto con el piso, y en el sentido antihorario (hacia delante).



Las ecuaciones de Newton dicen que esta fuerza provoca dos consecuencias a la vez: ① su sentido positivo en el eje x hace que el CM se acelere en ese sentido y ② su momento antihorario hace que en la rotación del CM tienda a disminuir la velocidad angular. Así, si bien inicialmente no se cumple la condición de rodadura $v_{CM} = \omega.R$, a medida que actúa el rozamiento la combinación de los dos efectos logra aumentar v_{CM} y disminuir ω hasta que la condición de rodadura se establece. En ese momento, el cilindro deja de "avanzar patinando" para pasar a "avanzar rodando". Y entonces, en ese momento, desaparece por completo el rozamiento, y a partir de allí son constantes v y w, cumpliendo la condición de rodadura.

Ahora que más o menos sabemos la física del movimiento transitorio, hasta que se establece la condición de rodadura, vamos a hablar de cómo resolver el problema. Para eso debemos ver que eligiendo cualquier punto sobre el plano el impulso angular permanece constante. En efecto: la fuerza de rozamiento es tangente al piso, por lo tanto su brazo de palanca y torque respecto de cualquier punto como el A del dibujo, vale cero. Esto es porque el rozamiento está alineado con la recta que une el punto de aplicación (el de contacto) y A. Las otras dos fuerzas aplicadas (Normal y Peso) se compensan, son iguales y opuestas, porque sabemos que el CM no tiene traslación vertical ($a_y = 0$). Entonces, respecto de A hay conservación de **L**.

Situación inicial
El cilindro tiene respecto al piso la suma de los momentos del CM más el de spin o rotación alrededor del CM

$$L_{total} = \overbrace{R.M.v_{cm}}^{=0} + I_{cm}.\omega_o$$

Situación final
El cilindro tiene respecto al piso:

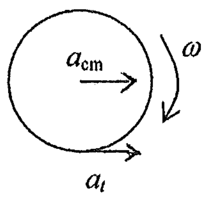
$$L_{total} = R.M.v_{cm} + I_{cm}.\omega_f =$$

$$\xrightarrow{rodadura} R.M.v_{cm} + I_{cm}.\frac{v_{cm}}{R}$$

Si hiciera falta, basta igualar estas expresiones para despejar lo que se desee (el problema no pide nada al respecto).

b) el punto de contacto no puede tener aceleración 0 hasta que no se alcance la condición de rodadura. Esto se puede ver pensando al movimiento del punto de contacto como la suma de la traslación del CM más la rotación alrededor del CM. Por lo tanto, para el punto de contacto tenemos la suma de la aceleración del CM más la tangencial del movimiento rotatorio.

Y ambas están dirigidas hacia delante: la del CM porque aumenta su velocidad de 0 hasta la final de rodadura, mientras que la tangencial es opuesta al sentido de giro, porque tiende a disminuir la velocidad de rotación.



Recién cuando se alcance la condición de rodadura, ambas aceleraciones son nulas

c) la cantidad de movimiento lineal no se conserva, porque: $\sum F = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \overbrace{f_{roz}}^{\neq 0} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Recién cuando lleguemos a la condición de rodadura, y el CM del cilindro haya alcanzado la velocidad necesaria, desaparece el rozamiento. Tampoco se conserva la energía mecánica mientras no se llega a la condición de rodadura, porque la fuerza de rozamiento está aplicada en un punto que no es estático (el punto de contacto tiene velocidad mientras que no se alcance la condición de rodadura)

N° de ISBN: 978-987-1606-14-0